Devoir surveillé n° 3

Éléments de correction

Exercice 1

1/ $\forall x \in]-6\,;\,1[$, $f(x) = -\dfrac{-2x-5}{\sqrt{-x^2-5x+6}} - 1$

On a donc : $\forall x \in]-6\,;\,1[$, $F(x) = -2\sqrt{-x^2-5x+6} - x + C$.

La condition initiale donne $C = 1 + 2\sqrt{6}$

Ainsi, $\forall x \in]-6\,;\,1[$, $F(x) = -2\sqrt{-x^2-5x+6} - x + 1 + 2\sqrt{6}$.

2/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+1)^5} = \dfrac{3}{2} \times (2x) \times (x^2+1)^{-5}$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{-5+1} \times (x^2+1)^{-5+1} + C = -\dfrac{3}{8(x^2+1)^4} + C$.

La condition initiale donne $C = 1$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -\dfrac{3}{8(x^2+1)^4} + 1$

Exercice 2

1/ Domaine de validité de (E_1) : $\mathscr{D}_1 =]1\,;\,10[$.

Sur $\mathscr{D}_1$, on a les équivalences suivantes :

$(E_1) \Leftrightarrow \ln(x-1)(x+6) = \ln(10-x) \Leftrightarrow x^2+5x-6 = 10-x \Leftrightarrow x^2+6x-16 = 0$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation sont 2 et -8.

Conclusion : $\mathscr{S}_1 = \{2\}$.

2/ Domaine de validité de (E_2) : $\mathscr{D}_2 =]3\,;\,+\infty[$.

Sur $\mathscr{D}_2$, on a les équivalences suivantes :

$(E_2) \Leftrightarrow \ln(x+2) = \ln \mathrm{e} + \ln(x-3) \Leftrightarrow \ln(x+2) = \ln(\mathrm{e}(x-3)) \Leftrightarrow x+2 = \mathrm{e}(x-3) \Leftrightarrow x - \mathrm{e}x = -3\mathrm{e} - 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1}$

Conclusion : $\mathscr{S}_2 = \left\{\dfrac{3\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1}\right\}$.

3/ Domaine de validité de (I_1) : $\mathscr{D}_3 =]0\,;\,+\infty[$

Sur $\mathscr{D}_3$, on a l'équivalence suivante :

$(I_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ -X^2+4X-3 \leqslant 0 \end{cases}$

L'étude du signe du polynôme du second degré précédent permet d'écrire :

$(I_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \ln x \\ X \leqslant 1 \text{ ou } X \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \ln x \leqslant 1 \text{ ou } \ln x \geqslant 3 \Leftrightarrow \ln x \leqslant \ln \mathrm{e} \text{ ou } \ln x \geqslant \ln \mathrm{e}^3 \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e} \text{ ou } x \geqslant \mathrm{e}^3$

Conclusion : $\mathscr{S}_3 =]0\,;\,\mathrm{e}] \cup [\mathrm{e}^3\,;\,+\infty[$

4/ Domaine de validité de (I_2) : $\mathscr{D}_4 =]-\infty\,;\,-1[\cup \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

Sur $\mathscr{D}_4$, on a les équivalences suivantes :

$(I_2) \Leftrightarrow 2x^2+3x+1 \leqslant x^2+2x+3 \Leftrightarrow x^2+x-2 \leqslant 0 \Leftrightarrow$ (après calculs) $-2 \leqslant x \leqslant 1$

Conclusion : $\mathscr{S}_4 = [-2\,;\,-1[\cup \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$

Exercice 3

1/ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(\dfrac{2x^2 - x + 2}{x^2 + 3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + 3} = 2 \\ \displaystyle\lim_{X\to 2} \ln X = \ln 2\end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$$

2/ $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = -4 \times \dfrac{\ln(1-4x)}{-4x}$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0} -4x = 0 \\ \displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1\end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to 0} f(x) = -4$$

3/ $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ f(x) = \dfrac{x\ln(x)(1+\frac{1}{x\ln x})}{x^2(1+\frac{2}{x^2})} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1+\frac{1}{x\ln x}}{1+\frac{2}{x^2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x\ln x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x^2} = 1\end{array}\right\} \text{ donc } \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x\ln x}}{1+\frac{2}{x^2}} = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{de plus } \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Exercice 4

1/ $x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \geqslant 0$. Après calculs, on obtient : $\mathscr{D}_f =]-\infty\,;\,1] \cup [5\,;\,+\infty[$.

2/ $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 - 6x + 5 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty\end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \text{ De même } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

3/ Il s'agit ici de la dérivabilité à gauche car f n'est pas définie sur $]1\,;\,5[$.

$$\forall h < 0,\ \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{(1+h)^2 - 6(1+h) + 5}}{h} = \frac{\sqrt{h^2 - 4h}}{h} = \frac{-h\sqrt{1-\frac{4}{h}}}{h} = -\sqrt{1-\frac{4}{h}}$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0} -\sqrt{1-\frac{4}{h}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 1.

4/ $\forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{1\,;5\},\ x^2 - 6x + 5 > 0$ et la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathscr{D}_f \setminus \{1\,;5\}$ en tant que composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{1\,;5\},\ f'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+5}} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$$

5/ On obtient le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	|	//////	|	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	//////	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5

1/ Ensemble de définition

$$x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 0 \\ 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \end{cases}. \text{ Ainsi, } \mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*.$$

2/ Limites

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2}=1\\ \displaystyle\lim_{X\to 1}\ln X=0\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\tfrac{1}{x^2})=0\text{ donc }\lim_{x\to+\infty}f(x)=1.\text{ De même }\lim_{x\to-\infty}f(x)=1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0} 1+\frac{1}{x^2}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{x\to 0}\ln(1+\tfrac{1}{x^2})=+\infty\text{ donc }\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty.$$

Les droites d'équation $x=0$ et $y=1$ sont asymptotes à la courbe représentant f.

3/ Variations

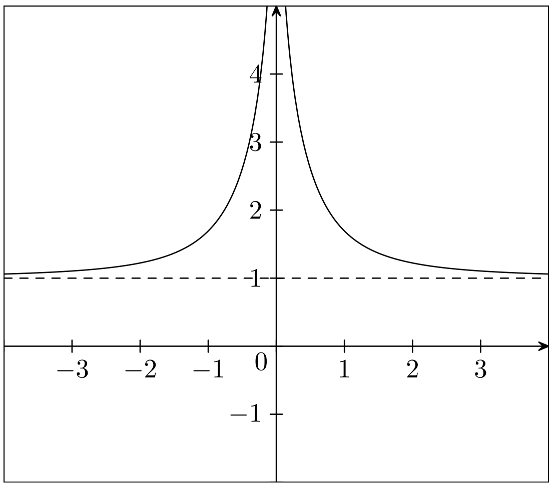
f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ (composée de fonction dérivables) et :

$\forall x\in\mathscr{D}_f,\ f'(x)=\dfrac{-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{-2}{x(x^2+1)}$ qui est du signe de $-x$ sur $\mathscr{D}_f$.

On obtient donc le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	‖	$-$
Variations de f	$1 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

4/ Courbe



5/ Autre

On peut aussi remarquer que f est paire et ne faire l'étude que sur $]0\,;+\infty[$.