Devoir surveillé n° 9

Durée : 1 heure

Exercice 1 (9 points)

On considère un questionnaire comportant cinq questions.
Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.
Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.
Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1/ a) Combien y a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?

b) On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
Calculer la probabilité des évènements suivants :
E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».
F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».
G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

2/ Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.
On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \dfrac{32}{243}$.

b) Quel est le nombre moyen d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte ?

c) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Exercice 2 (11 points)

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1/ Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.

a) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.

b) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.

2/ Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.
Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

3/ On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison.
On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre 0,001.

On rappelle que, pour tout nombre réel k positif : $P(X \leqslant k) = \displaystyle\int_0^k 0{,}001\mathrm{e}^{-0{,}001x}\,\mathrm{d}x$

a) Calculer la probabilité que le pneu parcourt moins de 500 km sans crevaison. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3}.

b) Calculer la probabilité que le pneu parcourt moins de 600 km sans crevaison sachant qu'il a parcouru plus de 500 km sans crevaison. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3}.