Devoir surveillé n° 9

Éléments de correction

Exercice 1

1/ a) Trois réponses possibles pour chacune des cinq questions : il y a donc $3^5 = 243$ mots possibles.

b) À chaque question l'élève obtient la bonne réponse avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. L'élève repète 5 fois cette expérience de manière indépendante. La variable aléatoire Z donnant le nombre de réponses exactes suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$.

On a alors :

$P(E) = P(Z=1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-1} = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2^4}{3^4} = \frac{80}{243}$

La probabilité qu'il n'ait aucune réponse juste est :

$P(F) = P(Z=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-0} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$.

Pour obtenir un palindrome, les trois premières réponses peuvent être quelconques, mais la quatrième doit être la même que la deuxième et la dernière la même que la première. On a donc :

$P(G) = 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

2/ a) Un élève n'a aucune réponse exacte avec une probabilité de $\frac{32}{243}$. En interrogeant les 28 élèves, on repète 28 fois cette expérience de manière indépendante. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.

b) La moyenne cherchée est $E(X) = 28 \times \frac{32}{243} \approx 3{,}69$

c) La probabilité cherchée est :

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 1) = P(X=0) + P(X=1) &= \binom{28}{0}\left(\frac{32}{243}\right)^0\left(1-\frac{32}{243}\right)^{28-0} + \binom{28}{1}\left(\frac{32}{243}\right)^1\left(1-\frac{32}{243}\right)^{28-1} \\ &= \left(\frac{211}{243}\right)^{28} + 28 \times \frac{32}{243} \times \left(\frac{211}{243}\right)^{27} \approx 0{,}10 \end{aligned}$$

Exercice 2

1/ a) On considère les évènements suivants :

- F_i : « le pneu provient du fournisseur i ».
- D : « le pneu présente un défaut ».

La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{D}\right) &= P\left(F_1 \cap \overline{D}\right) + P\left(F_2 \cap \overline{D}\right) + P\left(F_3 \cap \overline{D}\right) \\ &= P(F_1) \times P_{F_1}(\overline{D}) + P(F_2) \times P_{F_2}(\overline{D}) + P(F_3) \times P_{F_3}(\overline{D}) \\ &= 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}95 + 0{,}3 \times 0{,}85 = 0{,}24 + 0{,}38 + 0{,}255 = 0{,}875 \end{aligned}$$

b) La probabilité cherchée est :

$P_{\overline{D}}(F_2) = \frac{P\left(\overline{D} \cap F_2\right)}{P(F_2)} = \frac{P(F_2) \times P_{F_2}(\overline{D})}{P(F_2)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}95}{0{,}875} = \frac{0{,}38}{0{,}875} \approx 0{,}434$.

2/ Un pneu présente un défaut avec une probabilité de $1 - 0{,}875 = 0{,}125$. On répète 10 fois cette expérience de façon indépendante (car l tirage est supposé sans remise). La variable aléatoire Y donnant le nombre de pneus ayant un défaut suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}125$.

La probabilité cherchée est donc égale à :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 1) = P(Y=0) + P(Y=1) &= 0{,}125^0 \times 0{,}875^{10} + \binom{10}{1} \times 0{,}125^1 \times 0{,}875^9 \\ &= 0{,}875^{10} + 10 \times 0{,}125 \times 0{,}875^9 \approx 0{,}639 \end{aligned}$$

3/ a) La probabilité cherchée est :

$P(X \leqslant 500) = \int_0^{500} 0{,}001\mathrm{e}^{-0{,}001x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}001x}\right]_0^{500} = -\mathrm{e}^{-0{,}5} + \mathrm{e}^0 = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}393$

b) La probabilité cherchée est $P_{X \geqslant 500}(X \leqslant 600)$. La loi exponentielle étant la loi de « durée de vie sans vieillissement », on a :

$P_{X \geqslant 500}(X \leqslant 600) = P(X \leqslant 600 - 500) = P(X \leqslant 100) = \int_0^{100} 0{,}001\mathrm{e}^{-0{,}001x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-0.1} \approx 0{,}095$