Devoir surveillé n° 8
Terminale 7 S - 2010/2011
24 mars 2011 – Durée : 1 heure 30

Exercice 1 **10 points**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{3-x}$$

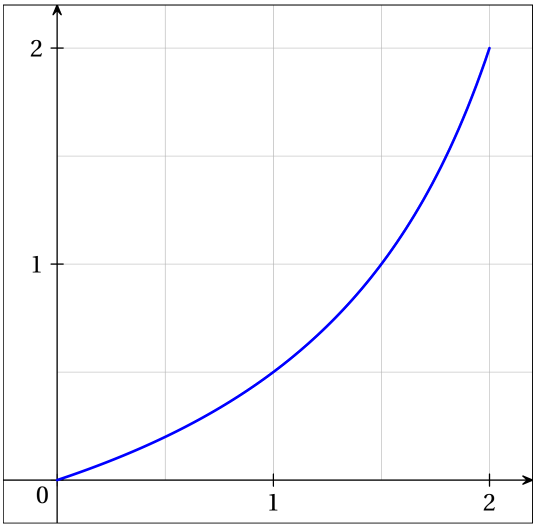
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est d'éudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant deux méthodes.

Partie A

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;2]$. En déduire que si $x \in [0;2]$ alors $f(x) \in [0;2]$.
2. a) Le graphique ci-dessous représente la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.
   Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en laissant apparents tous les traits de construction.
   À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$$
   c) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.



Partie B

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$$

1. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. En déduire, pour tout entier n, l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.
3. Retrouver le résultat de la question 2.d de la partie A.

Exercice 2 **6 points**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

   En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

   En déduire le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On appelle γ la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Calculer u_{10} et v_{10} et en déduire un encadrement de γ.

Exercice 3 **4 points**

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{-2}{u_n}$$

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.